

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2023-2024

Prova scritta in aula del 09.01.2024

Parte II - Testo 1

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità C , M_C .

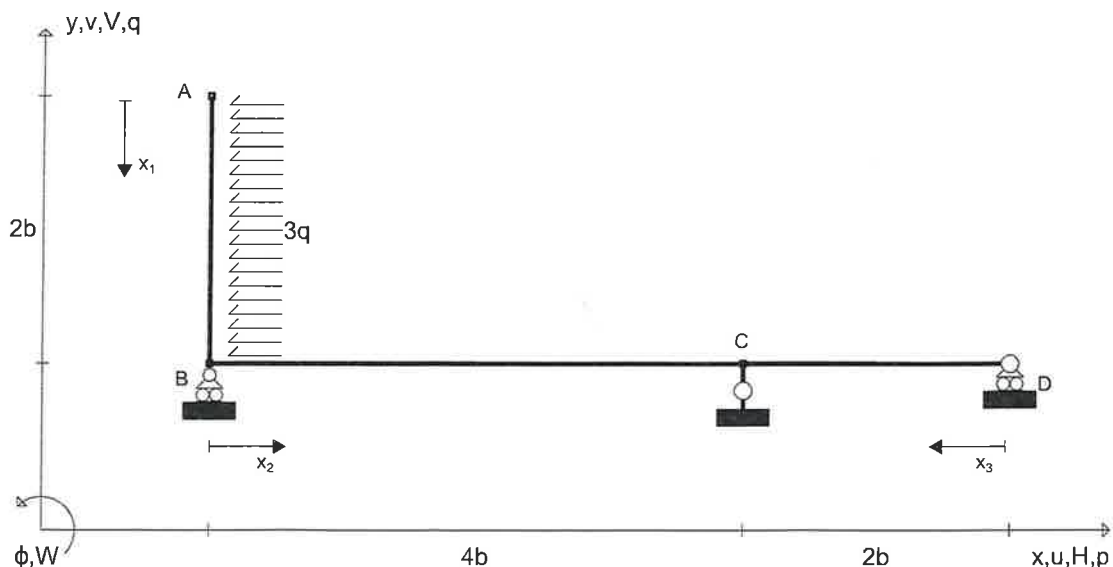
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto D , ϕ_D .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 09.01.24*001



EQ. DI CNGWENZA: $\Delta\phi_C = 0$

Esercizio n. 2 (7 punti)

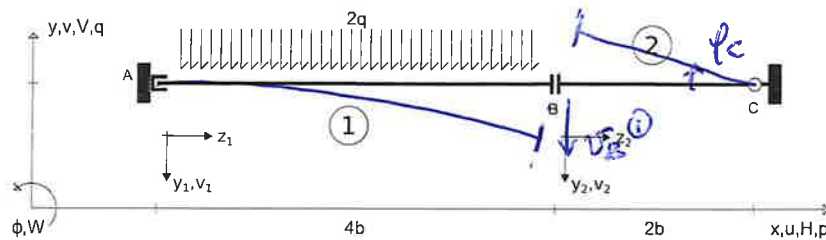
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti *A*, *B* e *C*.

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto *C*, φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto *B* relativo al tratto 1, $v_B^{(1)}$.

Università di Cagliari

SdC_SdA 09.01.24*001



$8pb$



$\uparrow \oplus \downarrow$

$16pb^2$



$\curvearrowright \oplus \curvearrowleft$

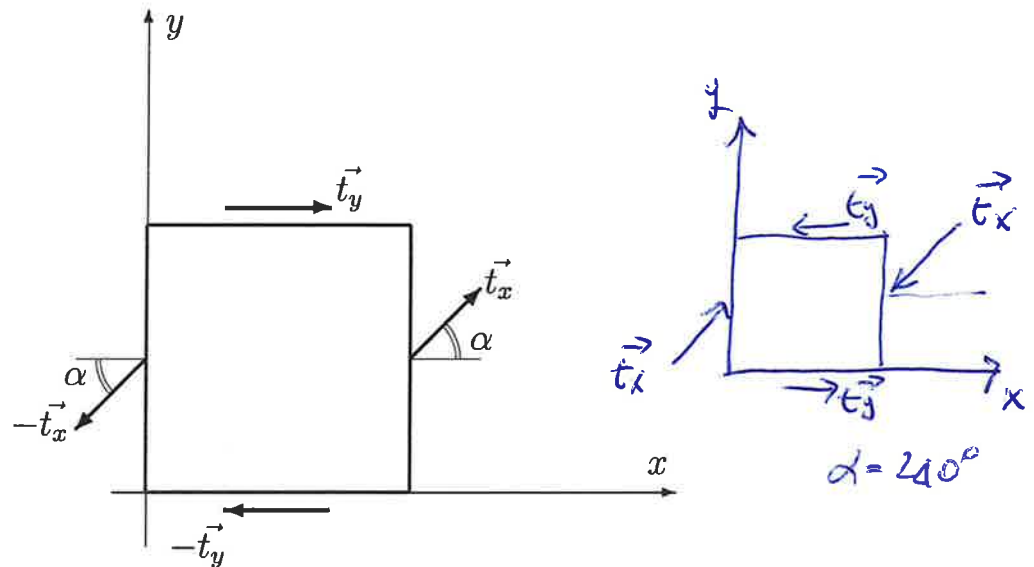
$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= 8pb; & M_A (\oplus) &= 16pb^2; & H_C (\Rightarrow) &= 0; & V_C (\uparrow) &= 0; \\
 N_{AB} &= 0; & T_{AB} &= 8pb - 2qz_1; & M_{AB} &= -16pb^2 + 8pbz_1 - qz_1^2; \\
 N_{BC} &= 0; & T_{BC} &= 0; & M_{BC} &= 0; \\
 \text{c.c in A} &= v_1(z_1=0)=0; & v_1'(z_1=0) &= 0; & \text{c.c in B} &= v_1'(z_1=4b) = v_2'(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in C} &= v_2(z_2=2b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(8pb^2 z_1 - \frac{4}{3} qb z_1^3 + \frac{1}{12} q z_1^4 \right); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} \left(16pb^2 z_1 - 4qb z_1^2 + \frac{1}{3} q z_1^3 \right); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{64}{3} qb^3 z_1 - \frac{128}{3} pb^4 \right); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} \left(\frac{64}{3} pb^3 \right); \\
 v_B^{(1)} &= \frac{256 pb^4}{3EI} (\downarrow); & \varphi_C &= \frac{64 qb^3}{3EI} (\uparrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 240^\circ$ (sicché; $\sin \alpha = -\sqrt{3}/2$; $\cos \alpha = -1/2$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 65$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

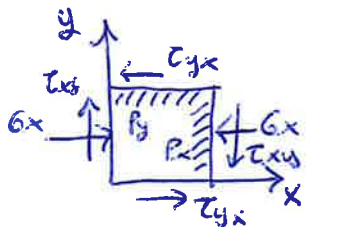
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$\sigma_x = 32,500$ (MPa); $\sigma_y = 0,000$ (MPa); $\tau_{xy} = -56,232$ (MPa);

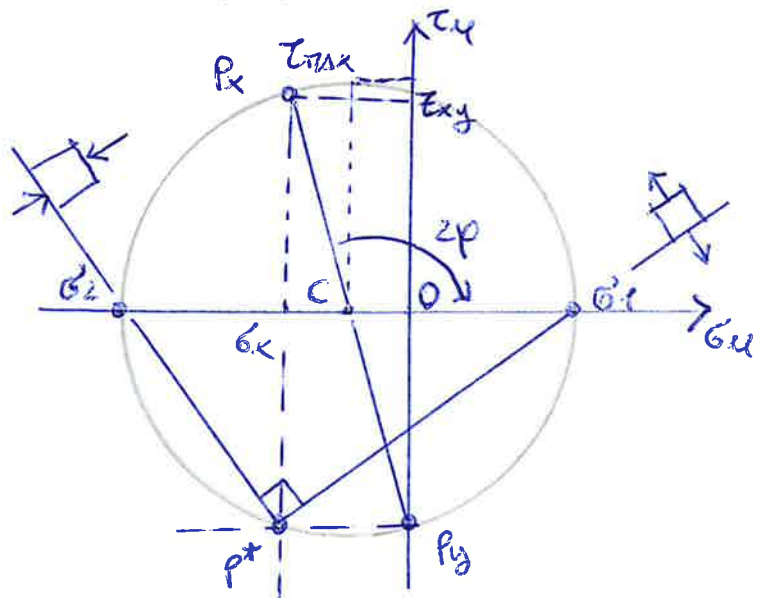
$\sigma_1 = 41,340$ (MPa); $\sigma_2 = -74,840$ (MPa); $\tau_{\max} = 58,530$ (MPa);

cerchio di Mohr:

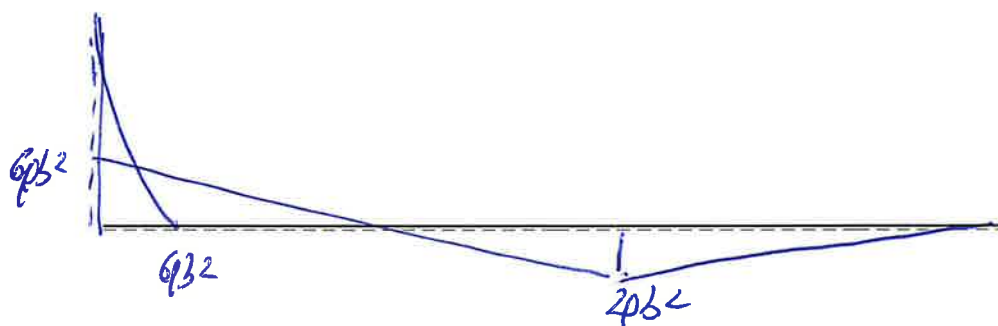
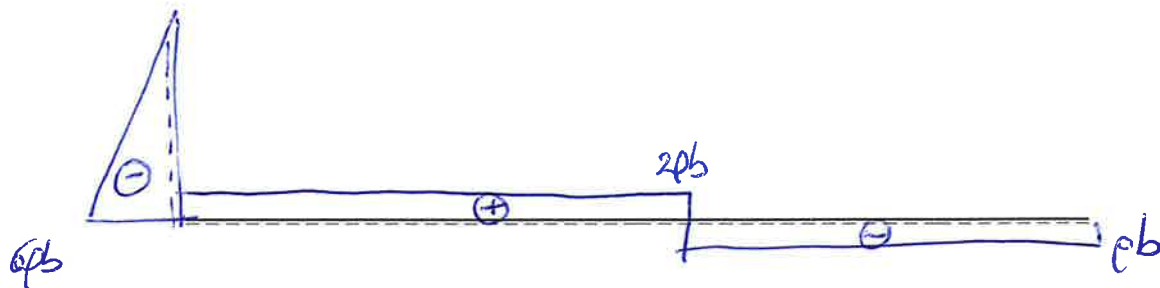
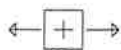
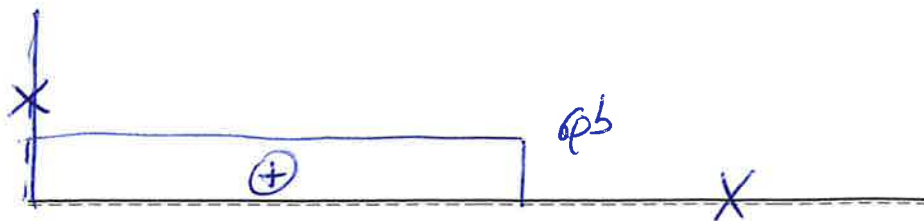


$P_x = (-32,500; +56,232)$

$P_y = (0,000; -56,232)$



$\varphi = -53,05$ (°);



$V_B(\uparrow) = 2pb$	$H_C(\Rightarrow) = 6pb$	$V_C(\uparrow) = -3pb$	$V_D(\uparrow) = pb$	$M_C(\square) = 2pb^2$
$N_{AB} = "$	$T_{AB} = -3p \times 1$	$M_{AB} = -\frac{3}{2}pb^2$		
$N_{BC} = 6pb$	$T_{BC} = 2pb$	$M_{BC} = -6pb^2 + 2pb \times 2$		
$N_{DC} = "$	$T_{DC} = -pb$	$M_{DC} = pb \times 3$		
$\varphi_D = \frac{2pb^3}{3EI} (G)$				

CORSO DI STATICA E SCIENZA DELLE COSTRUZIONI

A.A. 2023-2024

Prova scritta in aula del 09.01.2024

Parte II - Testo 2

Nota: I risultati numerici vanno riportati a penna su questo stesso foglio, nei riquadri predisposti; i calcoli (in forma ordinata) vanno allegati sui soli fogli a quadretti che sono stati forniti.

Allievo:.....e-mail:..... Matricola:.....

Esercizio n. 1 (17 punti)

Risolvere mediante il Principio dei Lavori Virtuali (PLV) la struttura iperstatica riportata in Figura, assumendo, come incognita iperstatica, il momento flettente sull'appoggio di continuità C , M_C .

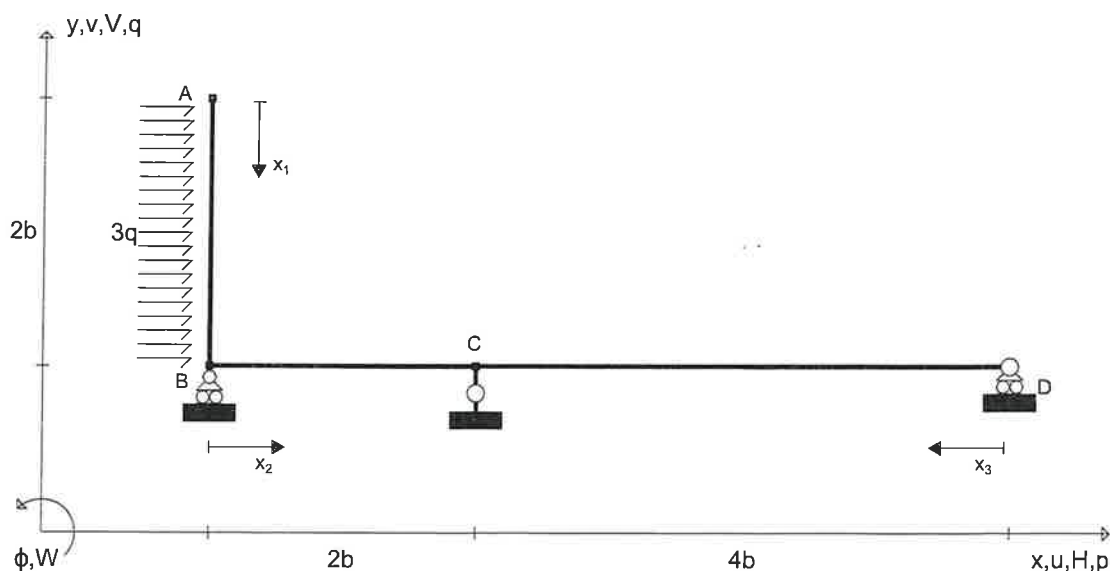
Dopo avere determinato l'iperstatica *tenendo conto solo della deformabilità flessionale*, calcolare le reazioni vincolari, le azioni interne e tracciare nello spazio predisposto nella pagina a fronte i corrispondenti grafici.

Calcolare infine, riapplicando il PLV, la rotazione del punto A , ϕ_A .

Si rammenta che il diagramma del momento flettente va riportato dalla parte delle fibre tese.

Universita' di Cagliari

SdC_SdA 09.01.24*002



EQ. DI LAVORAZIONE

$$\Delta \phi_C = 0$$

Esercizio n. 2 (7 punti)

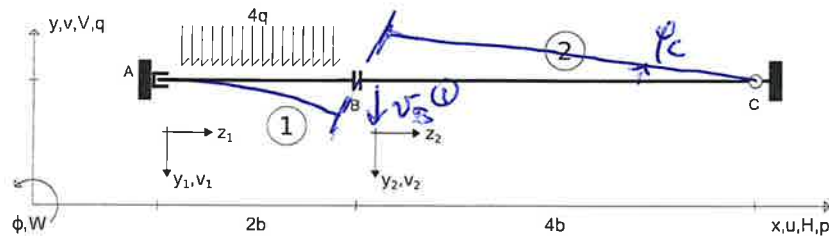
Per la struttura *isostatica*, indicata in Figura, determinare le reazioni vincolari e l'espressione delle azioni interne, nonché le condizioni al contorno imposte dai vincoli nei punti A , B e C .

Utilizzare quindi l'equazione della linea elastica per determinare:

1. La deformata della linea d'asse, $v(z) = v_1(z_1) \cup v_2(z_2)$;
2. La sua derivata prima, $v'(z) = v_1'(z_1) \cup v_2'(z_2)$;
3. La rotazione del punto C , φ_C ;
4. Lo spostamento verticale del punto B relativo al tratto 1, $v_B^{(1)}$.

Università di Cagliari

SdC_SdA 09.01.24*002



$8pb$



$\uparrow \oplus \downarrow$

$8pb^2$



\oplus

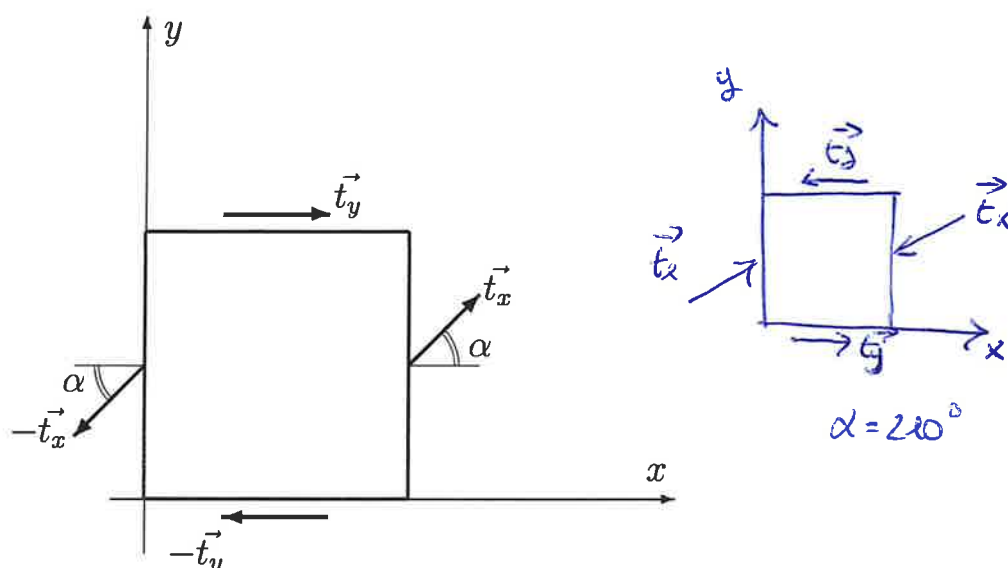
$$\begin{aligned}
 V_A (\uparrow) &= 8pb; & M_A (\curvearrowright) &= 8pb^2; & H_C (\Rightarrow) &= 0; & V_C (\uparrow) &= 0; \\
 N_{AB} &= //; & T_{AB} &= 8pb - 4qz_1; & M_{AB} &= -8pb^2 + 8pbz_1 - 2qz_1^2; \\
 N_{BC} &= //; & T_{BC} &= //; & M_{BC} &= //; \\
 \text{c.c in } A &= v_1(z_1=0)=0; \quad v_1'(z_1=0)=0; & \text{c.c in } B &= v_1'(z_1=2b)=v_2'(z_2=0); \\
 & & \text{c.c in } C &= v_2(z_2=4b)=0; \\
 v_1(z_1) &= \frac{1}{EI} (4pb^2z_1^2 - \frac{4}{3}qbz_1^3 + \frac{1}{6}qz_1^4); & v_1'(z_1) &= \frac{1}{EI} (8pb^2z_1 - 4pbz_1^2 + \frac{2}{3}qz_1^3); \\
 v_2(z_2) &= \frac{1}{EI} (\frac{16}{3}pb^2z_2 - \frac{64}{3}pbz_2^2); & v_2'(z_2) &= \frac{1}{EI} (\frac{16}{3}pb^2); \\
 v_B^{(1)} &= \frac{24pb^4}{3EI} (\downarrow); & \varphi_C &= \frac{16pb^3}{3EI} (\uparrow);
 \end{aligned}$$

Esercizio n. 3 (9 punti)

Un elemento di materiale *in condizioni di equilibrio* è soggetto lungo le facce aventi come normali gli assi x e y ai vettori sforzo (piani) \vec{t}_x e \vec{t}_y rispettivamente; di questi \vec{t}_x è inclinato rispetto all'asse x di un angolo $\alpha = 210^\circ$ (sicché; $\sin \alpha = -1/2$; $\cos \alpha = -\sqrt{3}/2$) e ha modulo di valore $|\vec{t}_x| = 55$ MPa. L'altro vettore sforzo, \vec{t}_y , è invece *orizzontale*, come indicato in Figura.

Si chiede di determinare le componenti σ_x , σ_y e τ_{xy} del tensore degli sforzi, costruire il cerchio di Mohr, determinare gli sforzi principali, σ_1 e σ_2 , e la massima tensione tangenziale, τ_{\max} .

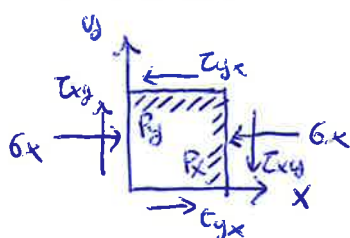
Determinare inoltre quanto vale l'angolo φ formato dall'asse x e dall'asse normale alla faccia sulla quale agisce lo sforzo principale massimo, σ_1 .



$$\sigma_x = -47,631 \text{ (MPa)}; \sigma_y = 0,000 \text{ (MPa)}; \tau_{xy} = -27,500 \text{ (MPa)};$$

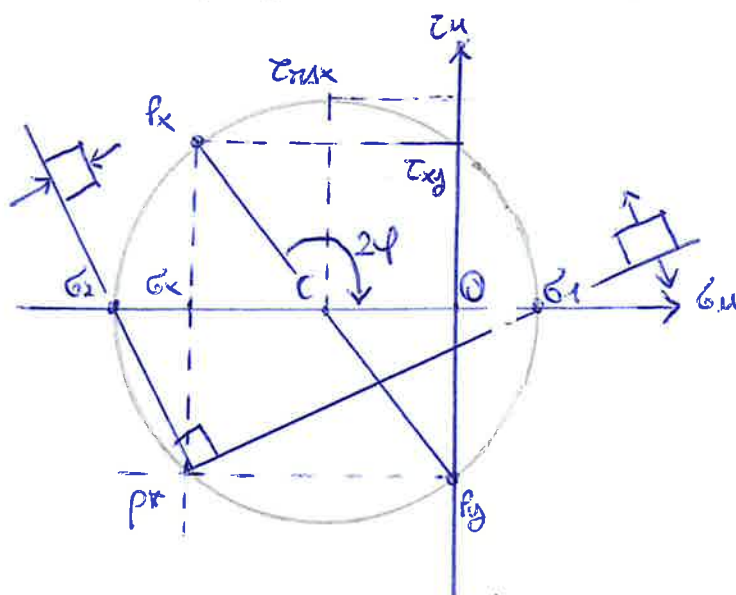
$$\sigma_1 = 12,563 \text{ (MPa)}; \sigma_2 = -60,135 \text{ (MPa)}; \tau_{\max} = 36,349 \text{ (MPa)};$$

cerchio di Mohr:

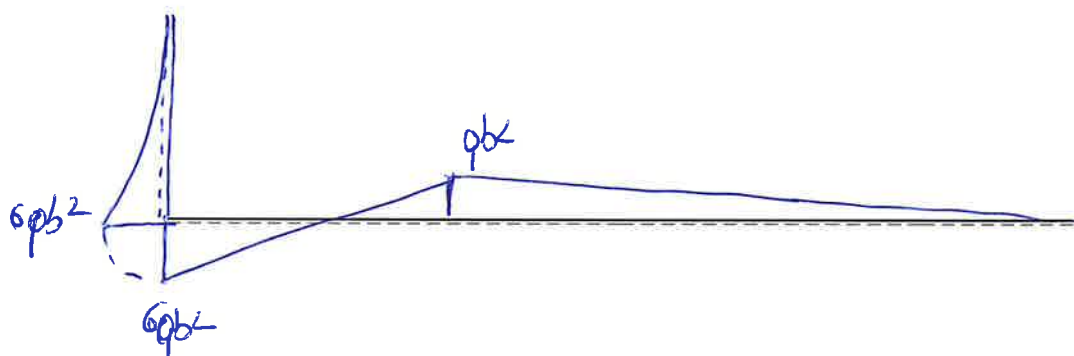
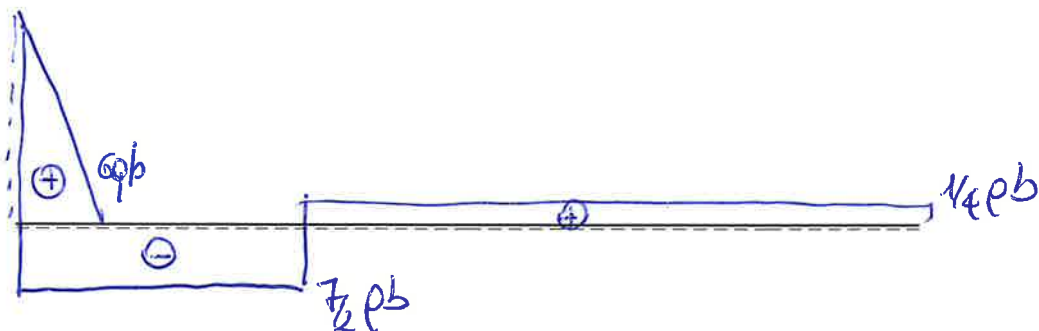
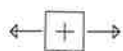
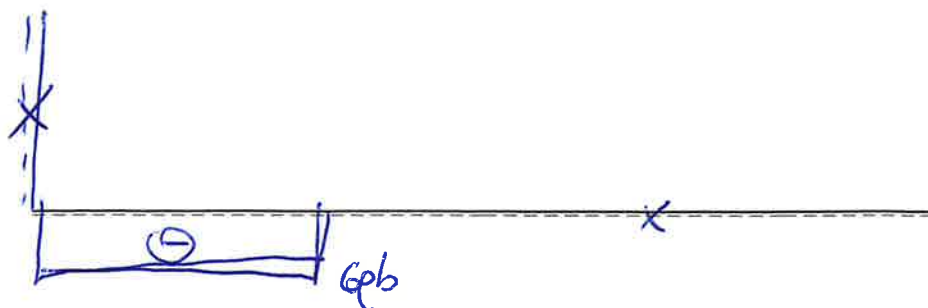


$$P_x = (-47,631; +27,500)$$

$$P_y = (0,000; -27,500)$$



$$\varphi = 65,45 \text{ (}^\circ\text{)};$$



$$\begin{aligned}
 V_B(\uparrow) &= -7/2pb; H_C(\Rightarrow) = -6pb; V_C(\uparrow) = 15/4pb; V_D(\uparrow) = 1/4pb; M_C(\curvearrowright) = -pb^2; \\
 N_{AB} &= 0; T_{AB} = 3px_1; M_{AB} = 3/2px_1^2; \\
 N_{BC} &= -6pb; T_{BC} = -7/2pb; M_{BC} = 6pb^2 - 7/2pb \times 2; \\
 N_{DC} &= 0; T_{DC} = 1/4pb; M_{DC} = -1/4pb \times 3; \\
 \varphi_A &= -23pb^3/32EJ \quad (2)
 \end{aligned}$$